MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE L'INSERTION PROFESSIONNELLE (**DGESIP**)

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Concours ITA session 2018

Composition : Mathématiques 7 (algèbre, analyse)

Durée : 2 Heures

Consignes pour les candidats	Merci de ne rien marquer sur le sujet. Pour chaque question de l'épreuve, une seule bonne réponse possible. Répondez sur la grille séparée qui comporte 23 questions (Q1 à Q23). Seules les grilles correctement remplies seront corrigées.

NB. : Dans cette épreuve, on demande d'indiquer, pour chaque question, la bonne réponse parmi celles qui sont proposées. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur la grille de réponse (au verso) et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Partie I : ANALYSE

Exercice 1

On veut déterminer la primitive de la fonction f définie par

$f(x)=\dfrac{\cos 3x}{\cos 2x-5}$

On pose $\omega(x)=\displaystyle\int\frac{\cos 3x}{\cos 2x-5}dx$

Question 1) Trouver ω(π-x) en fonction de ω(x).

A) ω(π-x)= -ω(x)

B) ω(π-x)= ω(x)

C) ω(π-x)= 2ω(x)

Question 2) Dans ce cas, faire le changement de variable approprié.

A) t=sinx

B) t=cosx

C) t=tan(x/2).

Question 3) Après calcul, on trouve :

A) $\displaystyle\int\frac{\cos 3x}{\cos 2x-5}dx=\int\frac{2t^2+1}{4+4t^2}dt$

B) $\displaystyle\int\frac{\cos 3x}{\cos 2x-5}dx=\int\frac{4t^2-1}{2(2+t^2)}dt$

C) $\displaystyle\int\frac{\cos 3x}{\cos 2x-5}dx=\int\frac{4t^2+1}{2+t^2}dt$

D) $\displaystyle\int\frac{\cos 3x}{\cos 2x-5}dx=\int\frac{2t^2-1}{2(1+t^2)}dt$

Question 4) Trouvez la primitive de f

A) $2\cos x-\dfrac{18}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan\dfrac{\cos x}{2}+C$

B) $\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}+C$

C) $2\sin x-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}+C$

D) $2\sin x-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan\dfrac{\sin x}{2}+C$

Exercice2

Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$$

Question 5) Etudiez les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

A) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

B) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

C) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

D) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

E) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

F) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$

Question 6) g est-elle continue en 0 ?

A) OUI

B) NON

Question 7) g est-elle dérivable en 0 ?

A) OUI

B) NON

Question 8) La fonction g est :

A) croissante sur IR

B) décroissante sur IR

C) croissante sur $\left]-\infty;2\right]$ et décroissante sur $\left[2;+\infty\right[$.

Question 9) Trouvez le développement limité de g en 0 à l'ordre 2.

A) $g(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+0\left(x^2\right)$

B) $g(x)=1-x+\frac{1}{3}x^2+0\left(x^2\right)$

C) $g(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+0\left(x^2\right)$

Question 10) Quelle est l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse nul est :

A) $y=1-x$

B) $y=1-\frac{1}{2}x$

C) $y=1+\frac{1}{2}x$

Question 11) Donner la position relative de la tangente par rapport à la courbe représentative de la fonction g .

A) La courbe représentative de g est en-dessous de la tangente au point x=0

B) La courbe représentative de g est au-dessus de la tangente au point x=0

C) La courbe représentative de g est confondue à la tangente au point x=0

PARTIE 2 : ALGEBRE

Soit IR^3 l'espace vectoriel sur IR muni de sa base canonique $B=(e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de IR^3 défini par : $f(x ;y ;z)=(2x+2y+z ;x+3y+z ;x+2y+2z)$.

Question 12) Trouver la matrice A de f relativement à la base B.

A) $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$

B) $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&1\\2&1&2\end{pmatrix}$

C) $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&3&1\\2&2&1\end{pmatrix}$

D) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\1&1&2\end{pmatrix}$

Question 13) Trouver le noyau de f.

A) Ker f= $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

B) Ker f= $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$

C) Ker f= $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}\right\}$

Question 14) f est :

A) un automorphisme de IR^3

B) un isomorphisme de IR^3

C) un homomorphisme de IR^3

Question 15) Quelles sont les valeurs propres de f ?

A) -1,1 et 5

B) 1,1et -5

C) 1,1 et 5

Question 16) f est :

A) trigonalisable

B) diagonalisable

C) triangularisable

Question 17) On donne les vecteurs $u_1=e_1+e_2+e_3$; $u_2=3e_1+4e_2+3e_3$; $u_3=3e_1+3e_2+4e_3$.

B' $=(u_1,u_2,u_3)$ est-elle une base de IR^3 ?

A) Oui

B) Non

Question 18) Déterminez la matrice de passage P de B à B'.

A) $P=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}$

B) $P=\begin{pmatrix}3&3&1\\3&4&1\\4&3&1\end{pmatrix}$

C) $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Question 19) Quelle est la matrice A' de f dans la base B' ?

A) $A^{'} = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) $A^{'} = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 20) Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $v'(t)-5v(t)=\alpha e^t$ où $\alpha=14k_1+13k_2$ et $(k_1,k_2) \in IR^2$.

A) $v(t)=ce^{-5t}-\frac{\alpha}{4}e^{-t}$; c, α ϵIR

B) $v(t)=ce^{5t}-\frac{\alpha}{4}e^{t}$; c, α ϵIR

C) $v(t)=ce^{5t}-\frac{\alpha}{4}e^{-2t}$; c, α ϵIR

D) $v(t)=ce^{5t}-\frac{\alpha}{2}e^{t}$; c, α ϵIR

Soit le système différentiel suivant :

$$(S): \begin{cases} x'(t) = 2x(t)+2y(t)+z(t) \\ y'(t) = x(t)+3y(t)+z(t) \\ z'(t) = x(t)+2y(t)+2z(t) \end{cases}$$

En posant $P^{-1}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix}$ et $P^{-1}\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix}$

où P^{-1}est la matrice inverse de P, démontrer que le système(S) est équivalent au système (S') défini comme suit :

Question 21)

A) $(S'): \begin{cases} a'(t) = 14a(t)+5b(t)+13\,c(t) \\ b'(t) = b(t) \\ c'(t) = c(t)) \end{cases}$

B) $(S'): \begin{cases} a'(t) = 5a(t)+14b(t)+13\,c(t) \\ b'(t) = b(t) \\ c'(t) = c(t)) \end{cases}$

C) $(S'): \begin{cases} a'(t) = 13a(t)-14b(t)+5c(t) \\ b'(t) = b(t) \\ c'(t) = c(t)) \end{cases}$

Question 22) En s'aidant de la question 20), trouvez la solution de (S').

A) $\begin{cases} a(t) = c_1e^t - \frac{1}{4}(14c_2+13c_3)e^{5t} \\ b(t) = c_2e^t \\ c(t) = c_3e^t \end{cases}$ $c_1, c_2, c_3 \in IR$

B) $\begin{cases} a(t) = c_1e^{5t} - \frac{1}{4}(13c_2+14c_3)e^{t} \\ b(t) = c_2e^t \\ c(t) = c_3e^t \end{cases}$ $c_1, c_2, c_3 \in IR$

C) $\begin{cases} a(t) = c_1e^{5t} - (14c_2+13c_3)e^{t} \\ b(t) = \frac{1}{4}c_2e^t \\ c(t) = c_3e^t \end{cases}$ $c_1, c_2, c_3 \in IR$

D) $\begin{cases} a(t) = c_1e^{5t} - \frac{1}{4}(14c_2+13c_3)e^{t} \\ b(t) = c_2e^t \\ c(t) = c_3e^t \end{cases}$ $c_1, c_2, c_3 \in IR$

Question 23) Trouver alors la solution de (S).

A) $\begin{cases} x(t) = c_1e^t - \frac{1}{2}c_2e^{5t} - \frac{1}{4}c_3e^t \\ y(t) = c_1e^{5t} + \frac{1}{2}c_2e^t - \frac{1}{4}c_3e^t \\ z(t) = c_1e^t - \frac{1}{2}c_2e^{5t} + \frac{3}{4}c_3e^t \end{cases}$

B) $\begin{cases} x(t) = c_1e^{5t} - \frac{1}{2}c_2e^t - \frac{1}{4}c_3e^t \\ y(t) = c_1e^{5t} + \frac{1}{2}c_2e^t + \frac{1}{4}c_3e^t \\ z(t) = c_1e^{5t} + \frac{1}{2}c_2e^t + \frac{3}{4}c_3e^t \end{cases}$

C) $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{5t} - \frac{1}{2} c_2 e^{t} - \frac{1}{4} c_3 e^{t} \\ y(t) = c_1 e^{t} + \frac{1}{2} c_2 e^{5t} - \frac{1}{4} c_3 e^{t} \\ z(t) = c_1 e^{t} - \frac{1}{2} c_2 e^{t} + \frac{3}{4} c_3 e^{5t} \end{cases}$